1. 기본 개념
   1. 명제와 집합
      1. 문장들 가운데 참 또는 거짓인 것을 명제라 한다.
         1. 명제 p가 주어져 있을 때 [p가 아니다]라고 주장하는 것을 그 명제의 부정이라 한다.
            1. ~p
         2. 두 명제 p, q에 대하여,
            1. p \or q : p 또는 q
            2. p \and q : p 그리고 q
      2. 변수 x에 특정한 경우를 대입했을 때 명제가 되는 경우가 있는데, 이러한 문장을 조건이라 한다.
         1. 조건이 참인 x들의 집합을 해당 조건의 진리집합이라고 한다.
      3. 집합을 기술할 떄 이미 알고 있는 집합을 상정하고 그 집합의 원소들 가운데 특정 조건을 만족하는 원소들을 모음으로써 집합으루 구성하는 경우락 마낳다. 이와 같이 전체 집합을 가정하고 있는 경우,조검 p(x)가 집합 U에서 정의되어있다고 말한다.
      4. 다음 x \in A <-> x \in B 을 만족할 때 A = B라 하고, A와 B가 같다고 한다.
      5. 다음 x \in A -> x \in B 을 만족할 때 A \subset B라 하고, A를 B의 부분집합이라고 부른다.
      6. 만일 A \neq 이면서 A \subset B 이면 A를 B의 진부분집합이라고 부른다.
      7. 집합 A에 대하여 A^{c} = {x : x \notin A} 라 정의하고 A^{c}를 A의 여집합이라고 부른다.
      8. 두 집합 A,B에 대하여 그 합집합 A \cup B 와 교집합 A\cap B 를 아래와 같이 정의한다.
         1. A \cup B = { x:x \in A \or x \in B}
         2. A \cap B = {x : x \in A \and x \in B}
      9. (성질) 합집합과 교집합의 성질들
         1. A \cup \empty = A
         2. A \cap \empty = \empty
         3. A \cup B = B \cup A
         4. A \cap B = B \cap A
         5. A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C
         6. A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C
         7. A \cup A = A
         8. A \cap A = A
         9. A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)
         10. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)
         11. (A \cup B)^{c} = A^{c} \cap B^{c}
         12. (A \cap B)^{c} = A^{c} \cup B^{c}
      10. 집합족 {A\_{i} : i \in I } 의 합집합과 교집합
          1. x \in \bigcup\_{i \in I} A\_{i} \iff x \in A\_{i} 가 성립하는 i \in I가 존재한다.
             1. 이를 \bigcup{A\_{i} : i \in I} 라 쓰기도 한다.
          2. x \in \bigcap\_{i \in I} A\_{i} \iff 임의의 i \in I 에 대해 x \in A\_{i}가 성립한다.
      11. 집합족의 합집합과 교집합의 성질
          1. (\bigcup\_{i \in I} A\_{i})^{c} = \bigcap\_{i \in I} A^{c}\_{i}
          2. (\bigcap\_{i \in I} A\_{i})^{c} = \bigcup\_{i \in I} A^{c}\_{i}
          3. A\cap(\bigcup\_{i \in I} A\_{i}) = \bigcup\_{i \in I} (A \cap A\_{i})
          4. A\cup(\bigcap\_{i \in I} A\_{i}) = \bigcap\_{i \in I} (A \cup A\_{i})
      12. 만일 집합족 { A\_{i} : i \in I } 이 다음 성질 i,j \in I, i \neq j \implies A\_{i} \cap A\_{j} = \empty 를 만족하면 서로소인 집합족이라고 하고 이때 그 합집합을 \sqcup\_{i \in I} A\_{i} 라고 표시한다.
      13. 두 원소 a,b의 순서쌍(a,b)를 다음 (a,b) = {{a},{a,b}}와 같이 정의한다.
      14. 두 집합의 곱집합 A \times B는 A \times B = {(a,b) : a \in A, b \in B}로 정의한다.
          1. A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)
          2. A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)
          3. (A \times B) \cap (C \times D) = ( A \cap C) \times (B \cap D)
   2. 함수
      1. 두 집합 X, Y의 곱집합 X \times Y의 부분집합 f \subset X \times Y가 다음 두가지 성질을 만족하면 이를 X에서 Y로 가는 함수라 하고, (x,y) \in f일 때 f(x) = y 혹은 f : x \mapsto y라 쓴다. 이 때, X를 이 함수의 정의역, Y를 이 함수의 공역이라 하고 이를 f : X \to Y라 한다.
         1. x \in X -> (x,y) \in f 를 만족하는 y \in Y가 존재한다.
         2. (x, y\_{1}) \in f, (x,y\_{2}) \in f -> y\_{1} = y\_{2}
      2. 집합 X에 대하여 {(x\_{1},x\_{2}) \in X \times X : x\_{1} = x\_{2}) 로 주어진 함수를 X에서 정의된 항등함수라고 부르고 1\_{X} : X \to X 라 쓴다.
      3. A \subset X일 때, {(a,a) \in A \times X : a \in A} 로 주어진 함수를 포함함수로 하고 i\_{A} : A -> X 라 쓴다.
      4. (정리 1.2.1) 두 함수 f : X->Y와 g : X -> Y 가 같은 함수일 필요충분조건은 f(x) = g(x) x \in X 이다.
      5. 함수 f : X \to Y와 g : Y \to Z 에 대하여 그 합성함수 g \bullet f : X ->Z를 다음과 같이 정의한다.
         1. (g \bullet f) =(x) = g(f(x)), x \in X
      6. (성질) 세 함수 f : X->Y, g : Y ->Z, h : Z ->W 에 대하여 다음 등식 (h \bullet g) \bullet f = h \bullet (g \bullet f)이 성립한다.
      7. 함수 f : X ->Y의 정의역 X의 부분집합 A가 주어졌을 때, 합성함수 f \bullet i\_{A} : A ->Y 를 f의 제한이라 하는데, 이를 f |\_{A} : A -> Y 로 쓰기도 한다.
      8. 함수 f : X->Y가 다음 성질을 만족하면 이를 단사함수라 한다.
         1. x\_{1}, x\_{2} \in X, f(x\_{1}) = f(x\_{2}) \implies x\_{1} = x\_{2}
      9. (정리 1.2.2) 함수 f : X->Y에 대하여 다음이 동치이다.
         1. f는 단사함수이다.
         2. g \bullet f = 1\_{X}를 만족하는 함수 g : Y->X가 존재한다.
      10. 함수 f : X->Y가 다음 성질을 만족하면 이를 전사함수라 한다.
          1. 임의의 y \in Y에 대하여 f(x) = y를 만족하는 x \in X가 존재한다.
      11. 함수 f : X ->Y가 전사이면서 동시에 단사이면 이를 전단사함수라 부른다.
      12. (정리 1.2.3) 함수 f : X->Y에 대하여 다음이 동치이다.
          1. f는 전사함수이다.
          2. f \bullet g = 1\_{Y}를 만족하는 함수 g : Y ->X가 존재한다.
      13. (정리 1.2.4) 함수 f : X -> Y에 대하여 다음은 동치이다.
          1. f는 전단사함수이다.
          2. f가 역함수를 가진다.
      14. (따름정리 1.2.5) 두 집합 X와 Y에 대해 다음은 동치이다.
          1. 단사함수 f : X ->Y가 존재한다.
          2. 전사함수 g : Y ->X가 존재한다.
      15. 집합 X에서 Y로 가는 함수 전체의 집합을 Y^{X}라 쓰자.
      16. 집합 X의 부분집합 전체의 집합을 \mathcal{P}(X)라 쓰고, 이를 X의 멱집합이라고 부른다. 이를 2^{X}라 쓰기도 한다.
      17. 다음과 같이 정의된 함수를 A의 특성함수라고 부르고, 이를 \chi\_{A}라 쓴다,
          1. \chi\_{A} (x) = \begin{cases} 1 & x\in A // 0 & x \notin A \end{cases}
      18. 임의의 집합족 {X\_{i} : i \in I} 에 대한 곱집합 \prod\_{i \in I} X\_{i}를 다음과 같이 정의한다. \prod\_{i \in I} X\_{i} = {f \in (\bigcup\_{i \in I} X\_{i})^{I} : f(i) \in X\_{i}, i \in I}
          1. 각 i \in I 에 대하여 다음 함수 \pi\_{i} : f \mapsto f(i) : \prod\_{i \in I} X\_{i} -> X\_{i} 를 생각할 수 있는데, 이를 사영이라 한다.
          2. 임의의 i \in I 에 대하여 X\_{i} = X이면, \prod\_{i \in I} X\_{i} = X^{I}이다.
   3. 동치관계
      1. 집합 X에 관계가 주어져있다는 것은 곱집합 X \times X의 부분집합이 주어져있다는 것이다.
      2. 관계 R \subset X \times X가 다음 성질들을 만족하면 이를 동치관계라 부른다. 동치관계 R \subset X \times X가 주어져있을 때 (x,y) \in R이면 x ~ y로 쓰기도 한다.
         1. 임의의 x \in X에 대하여 (x,x) \in R이다.
         2. (x,y) \in R이면 (y,x) \in R이다.
         3. (x,y) \in R이고 (y,z) \in R이면 (x,z) \in R 이다.
      3. 집합 X에 동치관계 ~가 주어져있을 때 각 x \in X에 대하여 [x] = {z \in X : z ~ X}라 정의하고 이를 x 의 동치류라 부른다.
         1. x ~ y \iff [x] = [y]
         2. x \nsim y \iff [x] \cap [y] = \empty
      4. 집합 X의 공집합이 아닌 부분집합족 {A\_{i} : i \in I }가 다음 두 성질을 만족하면 이를 X의 분할이라 한다.
         1. X = \bigcup\_{i \in I} A\_{i} 이다.
         2. 임의의 i, j \in I 에 대하여 A\_{i} \ A\_{j} 이거나 A\_{i} \cap A\_{j} = \empty 이다.
      5. 집합 X 에 동치관계 ~가 주어지면 X의 분할이 만들어진다. 이러한 분할을 X/~으로 표시한다.
         1. 만일 각 집합 [x]의 원소를 하나 택하여 r\_{x}라 두고 I = {r\_{x} : x \in X}라 두면, {[r] : r \in I}는 서로소인 집합족이 되고, 따라서 X = \bigcup{[r] : r \in I} 임을 알 수 있다.
      6. 집합 X의 분할 \mathcal{P} = {X\_{i} : i \in I} 가 주어졌을 때 동치관계를 만들 수 있다. 집합 X의 두 원소 x, y\in X가 x,y \in X\_{i}인 i \in I 가 존재한다면 x ~ y라 정의하자. 그러면 ~이 동치관계이다.
         1. 분할에 \mathcal{P} 에 의해 정의된 동치관계를 ~\_{\mathcal{P}}라 쓰기로 한다.
      7. (정리 1.3.1) 집합 X에 정의된 동치관계 ~에 대하여 ~ = ~\_{X/~}이 성립한다. 역으로, 임의의 분할 \mathcal{P}에 대해 \mathcal{P} = X/~\_{\mathcal{P}}가 성립한다 즉 임의의 x,y \in X 와 A \in 2^{X}에 대하여 x~y \iff x~\_{(X/~)} y, A \in mathcal{P} \iff A \in X/~\_{\mathcal{P}가 성립한다.
      8. 집합 X에 동치관계 혹은 분할에 의해 얻은 집합 X/~를 보통 몫집합이라 부르고, 다음 함수 q : X -> X/~ : x \mapsto [x]를 몫사상이라 부른다.
         1. 몫사상은 전사사상이다.
      9. 함수 f : X->Y가 다음 조건 x ~ y \implies f(x) = f(y)를 만족한다 가정하자. 그러면 새로운 함수 \tilde{f} : X/~ -> Y : [x] \mapsto f(x)를 정의할 수 있다.
      10. (정리 1.3.2) 집합 X 및 동치관계 ~와 함수 f : X->Y에 대하여 다음은 동치이다.
          1. \tilde{f} \bullet q = f 인 함수 \tilde{f} : X/~ ->Y가 유일하게 존재한다.
          2. x ~ y 이면 f(x) = f(y)이다.
   4. 순서
      1. 집합 X의 관계 R \subset X \times X가 다음 조건을 만족하면 이를 순서관계라 한다. 순서관계는 보통 \le로 표시한다.
         1. 임의의 x \in X에 대하여 (x,x) \in R이다.
         2. (x,y) \in R, (y,x) \in R이면 x = y이다.
         3. (x,y) \in R이고 (y,z) \in R이면 (x,z) \in R이다.
      2. 순서관계가 정의되어있는 집합을 순서집합이라 한다.
      3. 만일 x \le y 이면서 x \neq y이면 x < y라 쓴다.
      4. 순서집합의 부분집합 S \in X와 한 원소 a \in X에 대하여 x \in S -> x \le a성립하면 a가 S의 상계라 한다.
         1. 순서집합의 부분집합이 상계를 가지면 이 집합을 위로 유계라 한다.
         2. 상계중 가장 작은 원소를 최소상계 또는 상한이라 한다.
            1. 최소상계 \alpha는 S의 상계이다, 즉 x \in S -> x \le \alpha이다.
            2. \beta가 S의 상계이면 \alpha \le \beta이다, 즉 모든 x \in S에 대하여 x \le \beta이면 \alpha \le \beta이다.
         3. 만일 집합 S가 상한을 가지면 상한은 유일하며 이를 sup S라 쓴다.
      5. 순서집합의 부분집합 S \in X와 한 원소 a \in X에 대하여 x \in S -> x \ge a성립하면 a가 S의 하계라 한다.
         1. 순서집합의 부분집합이 상계를 가지면 이 집합을 아래로 유계라 한다.
         2. \alpha \in X 와 S \subset X가 다음 두 조건을 만족하면 \alpha를 S의 최대하계 또는 하한이라 한다.
            1. \alpha는 S의 하계이다.
            2. \beta가 S의 하계이면 \alpha \ge \beta이다.
         3. 만일 집합 S가 하한을 가지면 상한은 유일하며 이를 inf S라 쓴다
      6. 좌표공간 \mathbb{R}^{v}의 부분집합 C \subset \mathbb{R}^{v}가 다음 성질 x, y \in C, 0 \le t \le 1 \to tx + (1-t)y \in C를 만족하면 이를 볼록집합이라 한다
         1. 볼록집합 C의 볼록부분집합 F가 x, y \in C, tx + (1-t)y \in C인 t \in (0,1) 가 존재한다 \to x, y \in F 를 만족하면 F를 C의 면이라 한다. 한 점으로 이루어진 면을 꼭지점이라 부른다.
         2. 볼록집합 C의 면 전체의 집합 \mathbb{F}(C) 는 포함관계에 의하여 순서집합이 된다.
      7. 순서집합 X의 두 원소 x, y \in X 에 대하여 x \or y = sup{x,y}, x \and y = inf{x,y}라 쓰자. 임의의 두 원소 x, y \in X에 대하여 x \or y 및 x \and y 가 존재하면 X를 격자라 한다.
         1. 임의의 부분집합이 상한과 하한을 가지면 이를 완비격자라 부른다.
      8. X \ times X에서 X로 가는 함수가 주어지면 이를 X의 이항연산이라 부른다.
      9. (정리 1.4.1) 순서집합 X의 임의의 두 원소 x, y \in X에 대하여 x \or y 및 x \and y가 존재하면 다음이 성립한다. 역으로, 집합 X에 이항연산 \or과 \and가 정의되어 다음을 만족한다고 가정하자. 이 때, x \le y \iff x \or y = y 라 정의하면 X는 순서집합이 되고, 이 순서에 대해 격자가 된다.
         1. x \or x = x , x \and x = x
         2. x \or y = y \or x , x \and y = y \and x
         3. (x \or y) \or z = x \or (y \or z), (x \and y) \and z = x \and (y \and z)
         4. (x \or y) \and x = x , 1.4.5.7.4 (x \and y) \or x = x
2. 수의 체계
   1. 자연수
      1. 집합 A에 대하여 새로운 집합 A^{+}를 A^{+} = A\cup {A} 로 정의한다.
      2. 성질 \empty \in \mathcal{A}, A \in \mathcal{A} \implies A^{+} \in \mathcal{A}를 가지는 집합 \mathcal{A} 들 전체의 교집합을 \mathbb{N}이라 쓰고, 이 집합들의 원소들을 자연수라 부른다.
      3. (정리 2.1.1) 집합 \mathbb{N}은 다음 성질들을 만족한다. 이 다섯가지 성질은 페아노 공리계라 불린다.
         1. 0 \in \mathbb{N}
         2. n \in \mathbb{N} \implies n^{+} \in \mathbb{N}
         3. 임의의 n \in \mathbb{N}에 대하여 n^{+} \neq 0이다.
         4. 자연수들의 집합 X \subset \mathbb{N} 가 다음 두 성질 0 \in X, n \in X \implies n^{+} \in X 을 만족하면 X \ \mathbb{N} 이다.
         5. 만일 m, n \in \mathbb{N} 에 대하여 m^{+} = n^{+} 이면 m = n이다.
      4. 수학적 귀납법 : 만일 자연수 n \in \mathbb{N} 에 관한 명제 P(n) 이 있을 때, P(n)이 성립하는 자연수 n \in \mathbb{N} 들의 집합을 X라 두자. 만일 P(0)이 성립함을 알고 P(n) \implies P(n^{+})을 보이면 X는 (정리 2.1.1(3))을 만족하므로 X = \mathbb{N} 이다.
      5. (정리 2.1,2) 집합 X의 한 원소 a \in X 과 함수 f : X -> X 에 대하여, 다음 성질을 만족하는 함수 \gamma : \mathbb{N} -> X가 유일하게 존재한다.
         1. \gamma (0) = a
         2. 임의의 n \in \mathbb{N}에 대하여 \gamma (n^{+}) = f(\gamma(n))이 성립한다.
      6. 각 자연수 m \in \mathbb{N}에 대하여 \gamma\_{m} (0) = m, n \in \mathbb{N} \implies \gamma\_{m} (n^{+}) = [\gamma\_{m} (n)]^{+}를 만족하는 함수 \gamma\_{m} : \mathbb{N} -> \mathbb{N} 가 유일하게 존재한다. 두 자연수의 더하기를 m +n = \gamma\_{m} (n) , m,n \in \mathbb{N}라 정의한다.
      7. 각 자연수 m \in \mathbb{N}에 대하여 \delta\_{m} (0) = 0, n \in \mathbb{N} \implies \delta\_{m} (n^{+}) = \delta\_{m} (n) + m를 만족하는 함수 \delta\_{m} : \mathbb{N} -> \mathbb{N} 가 유일하게 존재한다. 두 자연수의 곱하기를 mn = \delta\_{m} (n) , m,n \in \mathbb{N}라 정의한다.
      8. (정리 2.1.3) 임의의 m, n, k \in \mathbb{N}에 대하여 다음이 성립한다.
         1. 0 + n = n, (m + n) + k = m + (n + k) , m + n = n + m
         2. 0n = 0, 1n = n, (mn) k = m(nk), mn = nm
         3. m(n + k) = mn + mk , (n+k)m = nm + km
      9. (정리 2.1.4) 비어있지 않은 자연수들의 집합은 최소 원소를 가진다.
      10. (따름정리 2.1.5) 임의의 두 자연수 m,n \in \mathbb{N}에 대하여 m \le n 혹은 n \le m이 성립한다.
      11. (성질) n \in \mathbb{N} \implies n = 0 혹은 n = m^{+} 인 m \in \mathbb{N}이 존재한다.
      12. (따름정리 2.1.6) 위로 유계이며 비어있지 않은 자연수들의 집합 A \subset \mathbb{N}은 최대 원소를 가진다.
      13. (정리 2.1.7) 만일 n = m + k이면 n \ge m 이다. 역으로, 두 자연수 m, n \in \mathbb{N} 에 대하여 n \ge m이면, n = m + k 을 만족하는 자연수 k \in \mathbb{N} 가 유일하게 존재한다.
      14. (정리 2.1.8) 자연수 m, l \in \mathbb{N}이 0 < m \le l이면 다음 l = mn + r, 0 \le r < m 을 만족하는 자연수 n, r \in \mathbb{N} 이 유일하게 존재한다.
   2. 정수와 유리수
      1. (성질) 집합 \mathbb{N} \times \mathbb{N} = {(m,n) : m,n \in \mathbb{N}} 에 다음 (m,n) ~ (m’,n’) \iff m+n’ = n+m’ 과 같이 관계를 정의하면 ~는 \mathbb{N} \times \mathbb{N}의 동치관계이고 m \ge k, n \ge k \implies (m,n) ~ (m-k, n-k) 가 성립한다.
      2. (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} 을 원소로 가지는 동치류 [(m,n)]을 [m,n]이라 표시한다. 집합 \mathbb{N} \times \mathbb{N}/~ 를 \mathbb{Z}라 쓰고 \mathbb{Z}의 원소를 정수라 부른다.
      3. (성질) 집합 \mathbb{Z}에 [m,n] \ge [k,l] \iff m+l \ge n + k 와 같이 관계를 정의한다. 만일 (m,n) ~ (m’,n’) 이고 (k,l) ~ (k’,l’)이면 m+l \ge n +k \iff m’ + l’ \ge n’ + k’이다. 이 관계는 순서관계가 된다.
      4. (정리 2.2.1) 정수집합 \mathbb{Z}에 대해 다음이 성립한다.
         1. 임의의 원소 a,b \in \mathbb{Z}에 대하여 a \ge b이거나 b \ge a이다.
         2. 비어있지 않은 \mathbb{Z}의 부분집합 A가 위로 유계이면 A 는 최대원소를 가진다. 비어있지 않은 \mathbb{Z}의 부분집합 A가 아래로 유계이면 A는 최소원소를 가진다.
      5. 정수 사이의 더하기를 [m, n] + [k,l] = [m+k, n+l] 이라 정의한다.
         1. 잘 정의되어있고 교환법칙과 결합법칙을 만족하며 항등원 [0,0]이며 [n,m]의 역원은 [m,n]이다.
      6. 집합 F에 두 이항연산 (x,y) \mapsto x + y, (x,y) \mapsto x \cdot y가 주어져서 다음의 성질들을 만족하면 이를 체라고 한다.
         1. 임의의 a,b,c \in F에 대하여 a + (b + c) = (a + b) + c 이다.
         2. 다음 성질을 만족하는 원소 e \in F가 존재한다. 이는 유일하며 더하기의 항등원 0 이라 한다.
            1. 임의의 a \in F 에 대하여 a + e = e + a = a
         3. 각 a \in F에 대하여 다음 성질을 만족하는 원소 x \in F가 존재한다. 이를 더하기에 관한 a의 역원이라 하며 각 a에 대하 유일하다.
            1. a + x = x + a = 0
         4. 임의의 a, b \in F에 대하여 a + b = b + a이다.
         5. 임의의 a, b, c \in F 에 대하여 a(bc) = (ab)c 이다.
         6. 다음 성질을 만족하는 0 아닌 원소 1 \in F가 존재한다. 이를 곱하기의 항등원이라 한다.
            1. 임의의 a \in F 에 대하여 a \cdot 1 = 1 \cdot a = a
         7. 각 a \in F /{0}에 대하여 다음을 만족하는 원소 x \in F가 존재한다. 이를 곱하기에 관한 a의 역원이라 하며 각 a에 대해 유일하다.
            1. ax = xa = 1
         8. 임의의 a,b \in F에 대하여 ab = ba이다.
         9. 임의의 a,b,c, \in F에 대하여 a(b+c) = ab + ac 이다.
      7. 체 F의 부분집합 S에 대하여 집합 -S를 -S = {-a : a \in S}라 정의한다.
      8. 체 F에 비어있지 않은 부분집합 P가 존재하여 다음과 같은 성질을 가지면 이를 순서체라 하고 P의 원소를 양수라 한다.
         1. a, b \in P \implies a + b, ab \in P
         2. F = P \cup {0} \cup (-P)
         3. 집합 P, {0}, -P는 서로소이다.
      9. 순서체 F 위의 두 원소 a,b \in F에 대하여 a-b \in P이면 a가 b보다 크다고 말하며 이를 a > b 또는 b < a라 쓴다.
      10. 순서체 F의 원소 a \in F의 절댓값 |a|를 다음과 같이 정의한다.
          1. |a| = \begin{cases} a & a \ge 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}
      11. (정리 2.2.2) 순서치 F의 임의의 원소 a,b,c \in F에 대하여 다음이 성립한다.
          1. |a| \ge 0이다. |a| = 0 \iff a = 0
          2. |ab| = |a||b|
          3. b \ge 0 이면 |a| \le b \iff -b \le a \le b
          4. ||a|-|b|| \le |a \mp b| \le |a| + |b|
          5. |a-c| \le |a-b| + |b-c|
      12. 집합 \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} /{0})에 관계 ~ 를 정의하여 (a,b) ~ (c,d) \iff ad = bc 이도록 하면 이는 \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} /{0}) 위의 동치관계가 된다. \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} /{0})/~를 \mathbb{Q}라 쓰고, \mathbb{Q}의 각 원소를 유리수라 부른다.
          1. 각 유리수를 나타내는 동치류[(a,b)]를 [a,b]라 쓴다.
          2. 더하기 와 곱하기를 [a,b] + [c,d] = [ad + cb, bd] , [a,b] \cdot [c,d] = [ac,bd] 라고 정의한다,
          3. 각 a \in \mathbb{Z}에 대하여 a^{\*} = [a,1]이라 쓰면 0^{\*}와 1^{\*}은 각각 더하기와 곱하기에 대한 항등원이 된다.
      13. (성질) 함수 a \mapsto a^{\*} : \mathbb{Z} -> \mathbb{Q}가 단사함수임은 자명하다. 또한, 다음 성질들 (a + b)^{\*} = a^{\*} + b^{\*}, (ab)^{\*} = a^{\*}b^{\*}, a \ge b \iff a^{\*} \ge b^{\*}이 성립하므로 더하기,곱하기, 순서에 관한 한 \mathbb{Z} 는 \mathbb{Q}의 부분집합으로 생각할 수 있다. 유리수 [a,b]를 그냥 \frac{a}{b}라 쓴다.
      14. 임의의 순서체 F는 더하기와 곱하기에 관한 항등원 0과 1을 가진다. \gamma (0) = 0 \gamma(n + 1) = \gamma (n^{+}) = \gamma(n) + 1를 만족하는 함수 \gamma: \mathbb{N} -> F 가 유일하게 존재한다.
          1. \gamma(n+m) = \gamma(n) + \gamma(m), \gamma(nm) = \gamma(n)\gamma(m), m, n \in \mathbb{N}이다.
          2. \gamma(n) \in P\_{F} n = 1, 2, …
          3. \gamma: \mathbb{N} -> F 는 단사함수이다.
      15. 함수 \gamma: \mathbb{Z} -> F 를 \gamma(n) = \gamma(n), \gamma(-n) = -\gamma(n), n \in \mathbb{N} 으로 정의한다.
      16. 함수 \gamma: \mathbb{Q} -> F 를 \gamma(\frac{a}{b}) = \frac{\gamma(a)}{\gamma{b}}, (a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} / {0}) 이라 정의한다.
          1. 잘 정의되어있고 단사함수이다.
      17. (정리 2.2.3) 임의의 순서체 F에 대하여 다음 성질을 만족하는 단사함수 \gamma: \mathbb{Q} -> F가 유일하게 존재한다.
          1. \gamma(r+s) = \gamma(r) + \gamma(s), \gamma(rs) = \gamma(r)\gamma(s)
          2. \gamma(P\_{\mathbb{Q}} = \gamma(\mathbb{Q}) \cap P\_{F} 이다.
      18. (정리 2.2.4) 순서체 F에 대하여 다음은 동치이다. 이 동치조건들을 만족하면 아르키메데스 성질을 만족한다고 말한다.
          1. x > 0 이면 x > \frac{1}{n}인 자연수 n = 1,2,…이 존재한다.
          2. y > 0 이면 y < n 인 자연수 n = 1,2,…이 존재한다.
          3. 집합 \mathbb{N}(\subset F) 은 위로 유계가 아니다.
          4. 임의의 x, y > 0 에 대하여 y < nx를 만족하는 자연수 n = 1,2,… 이 존재한다.
      19. (정리 2.2.5) 유리수체는 아르키메데스 성질을 만족한다.
   3. 데데킨트 절단과 실수
      1. 유리수들의 집합 \alpha \subset \mathbb{Q}가 다음 성질들을 만족하면 이를 데데킨트 절단 혹은 그냥 절단이라고 한다. 데데킨트 절단 전체의 집합을 \mathbb{R}이라 쓰고, 이 집합의 원소를 실수라 부른다.
         1. \alpha \neq \empty, \alpha \neq \mathbb{Q}
         2. 만일 p \in \alpha, q \in \mathbb{Q}, q < p이면 q \in \alpha 이다.
         3. 만일 p \in \alpha 이면 p < r인 r \in \alpha가 존재한다.
      2. 임의의 r \in \mathbb{Q}에 대하여 r^{\*} = {p \in \mathbb{Q} : p < r } 은 절단이다.
      3. 절단 \alpha 에 대하여 \alpha^{c} = \mathbb{Q}/\alpha 라 두면 p \in \alpha, q \in \alpha^{c} \implies p < q, r \in \alpha^{c}, r <s \implies s \in \alpha^{c} 가 성립한다. 따라서 두 집합 \alpha, \alpha^{c}는 \mathbb{Q}를 왼쪽과 오른쪽으로 분할한다.
      4. 두 절단 \alpha, \beta에 대하여 \alpha \le \beta \iff \alpha \subset \beta 로 순서관계를 정의한다.
         1. \alpha \lneq \beta is noted as \alpha < \beta
      5. (정리 2.3.1) 임의의 실수 \alpha, \beta \in \mathbb{R} 에 대하여 다음 \alpha > \beta, \alpha = \beta, \alpha < \beta 중 한 명제가 성립하고, 또한 두 명제가 동시에 성립하지 않는다.
      6. (정리 2.3.2) 비어있지 않은 집합 A \subset \mathbb{R}이 위로 유계이면 A는 상한을 가진다.
      7. \alpha, \beta \in \mathbb{R}에 대하여 \alpha + \beta = { s + t \in \mathbb{Q} : s \in \alpha, t \in \beta}이라 정의한다.
         1. 이 연산은 닫혀있고, 결합법칙, 교환법칙이 성립한다. 0^{\*}이 더하기에 대한 항등원이다. 각 \alpha \in \mathbb{R}에 대해 더하기에 대한 역원이 존재한다.
      8. 임의의 \alpha, \beta \in P\_{\mathbb{R}}에 대하여 곱하기 \alpha \beta = {p \in \mathbb{Q} : p \le rs 인 r \in \alpha \cap P\_{\mathbb{Q}}, s \in \beta \cap P\_{\mathbb{Q}}가 존재한다}
         1. 이 연산은 닫혀있고 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립하며 1^{\*}이 곱하기에 대한 항등원 이다. 각 \alpha \in \mathbb{R}에 대해 곱하기에 대한 역원이 존재한다.
   4. 코시 수열과 실수
      1. 자연수 집합 \mathbb{N} 에서 집합 X로 가는 함수 x : \mathbb{N} -> X를 X의 수열이라 부른다.
      2. 순서체 F의 수열 x : \mathbb{N} -> F 와 a \in F가 주어져 있을 때, 임의의 e \in P\_{F}에 대하여 i \ge N \implies |x(i) – a| < e 를 만족하는 자연수 N \in \mathbb{N} 이 존재하면, x가 a \in F 로 수렴한다고 말한다.
      3. 임의의 e \in P\_{F}에 대하여 i, j \ge N \implies |x(i) – x(j)| < e 를 만족하는 자연수 N \in \mathbb{N} 이 존재하면, x를 코시 수열이라고 부른다.
         1. 유리수의 코시 수열을 기본열이라고 말한다.
      4. 순서체 F의 수열 x 에 대하여 |x(i)| \le M , i \in \mathbb{N}를 만족하는 M \in F 가 있으면 이는 유계수열이라고 한다.
      5. (정리 2.4.1) 순서체 F의 수열 x : \mathbb{N} -> F 가 수렴하면 코시 수열이다. 또한 임의의 코시 수열은 유계이다.
      6. 두 기본열 \alpha, \beta : \mathbb{N} -> \mathbb{Q} 가 주어져 있다고 하자. 임의의 유리수 e > 0 에 대하여 i \ge N \implies |\alpha(i) - \beta(i)| < e 이 성립하는 자연수 N을 잡을 수 있을 때, \alpha ~ \beta 라 정의하자.
         1. 관계 ~ 는 기본열 전체의 집합 \mathcal{F}의 동치관계가 된다.
         2. \mathcal{F}/~을 \mathbb{R} 로 표시하고, 이 몫집합의 원소들을 실수라고 말한다.
      7. 두 실수 [\alpha], [\beta] \in \mathbb{R} 에 대하여, 다음 성질 i \ge N \implies \alpha(i) - \beta(i) > d 를 만족하는 유리수 d >0 와 자연수 N 이 있을 때, [\alpha] > [\beta] 이라 정의한다.
      8. (정리 2.4.2) 임의의 실수 [\alpha], [\beta] \in \mathbb{R} 에 대하여 다음 [\alpha] > [\beta], [\alpha] = [\beta], [\alpha] < [\beta] 중 한 명제가 성립하고, 또한 두 명제가 동시에 성립하지 않는다.
      9. 두 실수 [\alpha], [\beta] 에 대하여 [\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta]라 정의하자. 여기서 \alpha + \beta 는 i \mapsto \alpha(i) + \beta(i) 로 정의되는 유리수열이다.
         1. \alpha + \beta 는 기본열이다.
      10. 두 유리수열 \alpha , \beta : \mathbb{N} -> \mathbb{Q} 에 대하여 \alpha\beta : i \mapsto \alpha (i) \beta (i) 라 정의하자.
          1. \alpha , \beta가 기본열이면 \alpha\beta도 기본열이다.
      11. \alpha, \beta \in \mathbb{R} 에 대하여 곱하기 [\alpha][\beta] = [\alpha \beta] 로 정의한다
          1. 곱하기는 잘 정의되어있으며 결합법칙, 교환법칙, 분배법칙을 만족한다. 1^{\*} 이 곱하기에 관한 항등원이다. 곱하기에 관한 역원이 존재한다.
      12. P\_{\mathbb{R} = {[\alpha] \in \mathbb{R} : [\alpha] > 0^{\*}}
          1. 이 정의에 따라 실수체 \mathbb{R} 은 순서체가 된다.
      13. (정리 2.4.3) 두 실수 [\alpha], [\beta] 가 [\alpha] > [\beta] 이면 [\alpha] > [r^{\*}] > [\beta] 를 만족하는 유리수 r \in \mathbb{Q} 가 존재한다.
      14. 함수 i : \mathbb{N} -> \mathbb{N} 이 임의의 k = 0,1,2, … 에 대하여 i(k) < i(k+1) 이라 하자. 이 함수와 수열 x : i\mapsto x(i) 의 합성 x \bullet i : k \mapsto x(i(k)) 를 x의 부분수열이라 한다.
          1. 순서체 F의 수열 x가 a \in F로 수렴하면, x의 모둔 부분수열이 a로 수렴한다.
      15. (도움정리 2.4.4) 순서체 F의 코시수열 x의 한 부분수열 x \bullet i 가 점 a \in F 로 수렴하면 x 도 a \in F 로 수렴한다.
      16. (정리 2.4.5) 각 n = 1,2,… 에 대하여 [\alpha\_{n}] 이 실수이고, n \mapsto [\alpha\_{n}] 이 \mathbb{R}의 코시수열이라 하자. 그러면 이 수열은 \mathbb{R} 안에서 수렴한다.
   5. 완비순서체
      1. 순서체 F의 비어있지 않은 집합 A \subset F가 위로 유계이면 A는 상한을 가진다면(완1) F를 완비순서체라 한다.
         1. 데데킨트 절단으로 정의된 실수체 \mathbb{R}이 완비순서체이다.
         2. 다음 성질은 (완1)과 동치이다.
            1. (완2) 비어있지 않은 집합 A \subset F가 아래로 유계이면 A는 하한을 가진다.
         3. 코시 수열에 의하여 만든 실수체가 다음 조건을 만족한다.
            1. (완3) 임의의 코시수열 x : \mathbb{N} ->F 가 F 안에서 수렴한다.
      2. (정리 2.5.1) 완비순서체 F는 아르키메데스 성질을 만족한다.
      3. (정리 2.5.2) 완비순서체 F의 두 원소 x, y \in F가 x < y 이면 부등식 x < r < y 를 만족하는 유리수 r \in \mathbb{Q} (\subset F) 가 존재한다.
      4. (성질) (완3) 이면 (완1)이다.
         1. 코시수열을 이용하여 구성한 실수체가 완비순서체이다.
      5. 순서체 F의 부분집합 S,T \subset F에 대하여 S+T = {s+t \in F : s \in S, t \in T}라 정의한다. 그러면 sup(S,T) = sup S + sup T 가 성립한다.
         1. 순서체의 부분집합 S, T \subset P\_{F} 에 대하여 마찬가지로 ST = {st \in P\_{F} : s \in S, t \in T}라 정의한다. 그러면 다음 등식 sup ST = sup S sup T, S, T \subset P\_{F}가 성립한다.
      6. (정리 2.5.3) 임의의 두 완비순서체 F와 G가 주어지면, 전단사함수 f : F ->G가 존재하여 다음 두 성질을 만족한다.
         1. 임의의 x, y \in F에 대하여 f(x+y) = f(x) + f(y), f(xy) = f(x)f(y) 이 성립한다.
         2. f(P\_{F}) = P\_{G} 이다.
      7. (성질) (완1) \implies (완3)
3. 무한집합
   1. 선택공리
      1. (선1) 함수 f : X -> Y가 전사이면 f \bullet g = 1\_{Y}를 만족하는 함수 g : Y->X가 존재한다.
      2. (선2) 집합 X의 분할 \mathcal{P} 에 대하여, 각 A \in \mathcal{P}에 대해 g(A) \in A 를 만족하는 함수 g : \mathcal{P} -> X가 존재한다.
         1. (선1) \iff (선2)
      3. (선3) 집합 X가 주어지면, 각 A \in 2^{X} / {\empty} 에 대하여 h(A) \in A 를 만족하는 함수 h : 2^{X} / {\empty} -> X가 존재한다.
         1. (선2) \iff (선3)
         2. 각 A \in 2^{X} /{\empty} 에 대하여 h(A) \in A 를 만족하는 함수 h : 2^{X} /{\empty} -> X 를 집합 X의 선택함수라고 하고 명제 (선3)을 선택공리라 부른다.
      4. (선4) 임의의 집합족 {X\_{i} : i \in I}의 곱집합에 대해서 집합 I가 비어있지 않고, 임의의 i \in I 에 대하여 X\_{i}가 비어있지 않으면, \prod\_{i \in I} X\_{i}는 비어있지 않다.
         1. (선3) \iff (선4)
      5. (Zorn 도움정리) (정리 3.1.1) 순서집합 X의 모든 사슬이 상계를 가지면 X는 극대원소를 가진다.
         1. 순서집합 X의 부분집합 A가 다음 성질을 만족하면 A가 X의 사슬이라 한다.
            1. a, b \in A \implies a \le b 혹은 a \ge 이다.
         2. 순서집합 X의 원소 m \in X 이 다음 성질을 만족할 때 m 을 X의 극대원소라 한다.
            1. x \in X, x \ge m \implies x = m
         3. 순서집합 X의 원소 n \in X 이 다음 성질을 만족할 때 n 을 X의 극소원소라 한다.
            1. x \in X, x \le n \implies x = n
      6. (하우스도르프 극대원칙) (정리 3.1.2) 임의의 순서집합 X는 극대사슬을 가진다.
         1. (정리 3.1.1) 은 (정리 3.1.2)와 동치이다.
      7. (도움정리 3.1.3) 순서집합 X의 부분집합족 \Chi \subset 2^{X}가 다음 성질을 만족하면 \Chi 는 극대원소를 가진다.
         1. (가) A \in \Chi, B \subset A 이면 B \in \Chi 이다.
         2. C가 \Chi 의 사슬이면 \bigcup \mathcal{C} \in \Chi 이다.
      8. 순서집합 X에서 임의의 비어있지 않은 부분집합이 최소 원소를 가지면 X를 정렬집합이라 하고, 이러한 순서관계를 정렬순서라 한다.
         1. 자연수 집합 \mathbb{N}이 정렬집합이다.
         2. 정렬집합은 이미 그 자체로서 사슬이 된다.
      9. (Zermelo 정렬정리) (정리 3.1.4) 임의의 집합에는 정렬순서가 존재한다.
         1. (정리 3.1.4)와 (정리 3.1.1)이 동치이다.
   2. 선택공리의 응용
      1. 벡터공간 V의 부분집합 B가 다음 두 가지 성질을 만족하면 B를 벡터공간 V의 기저라 부른다.
         1. v\_{1}, v\_{2}, .., v\_{n} \in B와 스칼라 a\_{1}, a\_{2}, .., a\_{n} 이 다음 a\_{1}v\_{1} + a\_{2}v\_{2} + … + a\_{n}v\_{n} = 0을 만족하면 a\_{1} = a\_{2} = … = a\_{n} = 0 이다.
         2. 임의의 v \in V 에 대하여 v = a\_{1}v\_{1} + a\_{2}v\_{2} + … + a\_{n}v\_{n} 을 만족하는 v\_{1}, v\_{2}, .., v\_{n} \in B 와 스칼라 a\_{1}, a\_{2}, .., a\_{n} 이 존재한다.
      2. 유한개의 v\_{1}, v\_{2}, .., v\_{n} \in B와 스칼라 a\_{1}, a\_{2}, .., a\_{n} 에 대하여 a\_{1}v\_{1} + a\_{2}v\_{2} + … + a\_{n}v\_{n} 으로 표시되는 벡터 전체의 집합을 span B 라 표시하자.
      3. (정리 3.2.1) 임의의 벡터공간에는 기저가 존재한다.
      4. 집합 A \subset X 와 함수 f : A->Y가 주어져 있을 때, \tilde{f} |\_{A} = f를 만족하는 \tilde{f} : X -> Y 를 f 의 확장이라고 한다.
      5. (정리 3.2.2) 벡터공간 V의 부분공간 V\_{0}에서 정의된 임의의 선형사상 f : V\_{0} -> W 에 대하여 \tilde{f} |\_{V\_{0}} = f 를 만족하는 선형사상 \tilde{f} : V -> W가 존재한다.
      6. 벡터 사이의 거리를 노음이라 정의한다. 노음이 부여된 벡터공간을 노음공간이라 부른다.
         1. 노음공간 사이의 의미있는 선형사상은 노음이 유계인 유계사상이다.
      7. (Hahn – Banach 정리) (정리 3.2.3) 노음공간과 그 부분공간 Y가 주어져있다. 그러면 임의의 유계 선형사상 \phi : Y -> \mathbb{C} 에 대하여 다음 성질을 만족하는 유계선형사상 \tilde{\phi} 가 존재한다.
         1. \tilde{\phi} |\_{Y} = \phi , \Vert \tilde{\phi}\Vert = \Vert \phi \Vert
      8. (Tikhonov 정리) (Schreier 정리) 등이 선택공리를 사용하였다.
   3. 정렬집합과 서수
      1. 자연수 전체의 집합 \mathbb{N} 을 정렬집합으로 이해할 때는 \omega 라 쓴다.
         1. 각 자연수 n = {0,1,…, n-1}
      2. 정렬집합 A와 x \in A 에 대하여 다음 S\_{x} = {a \in A : a < x} 와 같이 정의된 집합 S\_{x} 를 x 에 의한 A의 절편이라고 부른다.
         1. 정렬집합의 절편은 정렬집합이다.
      3. 두 정렬집합 A,B가 서로소일 때 각 x, y \in A \sqcup B 에 대하여 다음이 성립할 때 x \le y 라 정의하자. 이 관계는 A\sqcup B 에서 정렬순서가 된다.
         1. x,y \in A, x \le Y 혹은
         2. x, y \in B, x\le y 혹은
         3. x \in A, y \in B
      4. 순서집합 A, B 사이에 정의된 함수 f : A->B 가 다음 조건 x, y \in A, x \le y \implies f(x) \le f(y) 를 만족하면 이를 증가함수라 한다.
      5. 자기자신 f와 그 역함수 f^{-1}가 모두 증가함수인 전단사함수 f : A->B 가 존재하면 A와 B는 순서동형이라 부르고 A \approxeq B 라 쓴다.
      6. 순서집합 A,B의 두 원소 (a\_{1}, b\_{1}) \in A \times B 와 (a\_{2} , b\_{2}) \in A \times B 에 대하여 a\_{1} < a\_{2} 혹은 a\_{1} = a\_{2}, b\_{1} \le b\_{2} 성립할 때, (a\_{1}, b\_{1}) \le (a\_{2}, b\_{2}) 라 정의한다. A \times B 에 정의된 이 순서를 사전순서라 부른다.
         1. b\_{1} < b\_{2} 혹은 b\_{1} = b\_{2}, a\_{1} \le a\_{2} 가 성립할 때, (a\_{1}, b\_{1}) \le (a\_{2}, b\_{2}) 라 정의된 순서를 반사전순서라 부른다.
      7. (정리 3.3.1) 두 정렬집합 A, B 가 주어지면 다음 중 하나가 성립한다.
         1. A 와 B는 순서동형이다.
         2. A 는 B의 절편과 순서동형이다.
         3. B는 A 의 절편과 순서동형이다.
      8. 임의의 유한 정렬집합 X는 단 하나의 자연수 n 과 순서동형이다. 이 떄 ord(X) = n 이라 쓴다. 임의의 정렬집합 A에 다음 성질 A\_{1} \approxeq A\_{} \iff ord(A\_{1}) = ord(A\_{2}) 이 만족하도록 ord(A)를 대응시킬 때 ord(X)를 X의 서수라 부른다.
         1. ord(\mathbb{N}) = \omega 라 표시한다.
      9. ord(A) = \alpha, ord(B) = \beta 가 되도록 서로소인 정렬집합 A, B 를 잡아 서수들의 더하기 \alpha + \beta = ord(A \sqcup B) 로 정의한다. A \times B 에 반사전순서를 부여한 후, \alpha \beta = ord( A \times B) 라 서수들의 곱하기를 정의한다.
         1. 결합법칙, 왼쪽 분배법칙은 성립하나 교환법칙, 오른쪽 분배법칙은 성립하지 않는다.
      10. 만일 g : A->C , h : B->D 가 순서동형을 정의한다면 f : A \sqcup B -> C \sqcup D 를 f = \begin{cases}g(x) & x \in A \\ h(x) & x \in B \end{cases} 라 정의한다. 이렇게 정의된 함수 f 를 g \sqcup h 라 쓴다.
          1. f도 순서동형을 정의한다.
      11. 서수 \alpha, \beta 에 대하여 ord(A) = \alpha, ord(B) = \beta 인 정렬집합 A, B 를 잡는다. 만약 A가 B의 절편과 순서동형이면 \alpha < \beta 라 정의하고, \alpha < \beta 이거나 \alpha = \beta 인 경우 \alpha \le \beta 라 정의한다.
          1. 임의의 서수 \alpha, \beta 에 대하여 \alpha < \beta, \alpha = \beta, \alpha > \beta 중 하나가 반드시 성립한다.
      12. (정리 3.3.2) 정렬집합 A의 부분집합 B가 성질 x \in A, S\_{x} \subset B \implies x \in B 를 만족하면 B = A이다.
      13. (정리 3.3.3) 정렬집합에 관한 성질 P가 주어져있다. 만일 임의의 정렬집합 X가 다음을 만족하면, 임의의 정렬집합이 성질 P를 만족한다.
          1. 만일 X 의 모든 절편이 P를 만족하면 X 도 P 를 만족한다.
   4. 무한집합과 선택공리
      1. 두 집합 X와 Y 사이에 전단사함수가 존재하면 X와 Y가 대등하다고 말하고, X \approx Y 라 쓴다.
         1. \mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}
         2. 두 선분 위에 있는 점들의 집합은 선분의 길이에 상관없이 항상 대등하다.
      2. (도움정리 3.4.1) 집합 X가 다음 성질 (3.16)을 만족하고 X와 Y가 대등하면, 집합 Y도 (성질 3.16) 을 만족한다.
         1. (성질 3.16) 자기자신과 대등한 진부분집합이 존재한다.
      3. (도움정리 3.4.2) 집합 X가 성질 (3.16)을 만족하고 X \subset Y 이면, 집합 Y도 성질 (3.16)을 만족한다.
      4. (정리 3.4.3) 자연수 n = {0,1,…,n-1} 의 부분집합 A가 n과 대등하면 A = n 이다.
      5. 집합 X와 대등한 자연수 n 이 존재하면 X를 유한집합이라 한다.
         1. 임의의 유한집합은 성질 (3.16)을 만족하지 않는다.
      6. (도움정리 3.4.4) 집합 X가 유한집합이 아니면, 자연수집합 \mathbb{N} 과 대등한 X의 부분집합이 존재한다.
         1. pf) (선택공리)
      7. (정리 3.4.5) 집합 X에 대하여 다음은 동치이다. 동치조건을 만족하는 집합을 무한집합이라 한다.
         1. 집합 X가 유한집합이 아니다. 즉, 임의의 자연수 n\in \mathbb{N} 에 대하여 X는 n 과 대등하지 않다.
         2. 집합 X와 대등한 X의 진부분집합 A가 존재한다.
      8. (성질) \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}
   5. 기수의 연산과 순서
      1. 임의의 유한집합 X는 단 하나의 자연수 n과 대등하다. 이 때, card(X) = n 이라 쓴다.
      2. 임의의 집합 A에 성질 A\_{1} \approx A\_{2} \iff card{A\_{1}} = card{A\_{2}} 이 성립하도록 card(A)를 대응시킬 때 card(X)를 X의 기수라 부른다.
      3. 기수 a,b 에 대하여 card(A) = a, card(B) = b 이고 서로소인 집합 A, B를 잡고 a + b = card(A \sqcup B\_ 라 정의한다.
         1. 이 연산은 잘 정의되어 있다.
      4. 두 기수 a, b 의 곱하기 ab 도 card(A) = a, card(B) = b 인 집합 A, B를 잡고 ab = card(A \times B) 라 정의한다.
      5. 두 기수 a, b 에 대하여 card(A) = a, card(B) = b 인 집합 A, B를 잡고 a^{b} = card(A^{B}) 라 정의한다.
         1. a^{b+c} = a^{b}a^{c} , (ab)^{c} = a^{c}b^{c} , (a^{b})^{c} = a^{bc}
      6. 집합 A 와 B 사이에 단사함수 f : A ->B 가 존재하면 A \preccurlyeq B 라 정의한다.
         1. A \preccurlyeq A
         2. A \preccurlyeq B, B \preccurlyeq C 이면 A \preccurlyeq C 이다.
      7. (성질) 임의의 집합 A, B 가 주어졌을 때 두 집합에 정렬순서를 부여하면 A \approx B 이거나, 적절한 a \in A, b \in B 에 대하여 A \approx S\_{b} \subset B 이거나 B \approx S\_{a} \subset A 이다.
      8. (정리 3.5.1) 임의의 집합 A, B 에 대하여 A \preccurlyeq B 혹은 B \preccurlyeq A 가 성립한다.
      9. (Bernstein) (정리 3.5.2) 만일 A \preccurlyeq B 이고 B \preccurlyeq A 이면 A \approx B 이다.
      10. 두 기수 a,b 에 대하여 a = card(A) 와 b = card(B) 인 집합 A, B 를 잡고 A \preccurlyeq B 이면 a \le b 라 정의하자.
          1. 잘 정의되어 있고 순서관계가 된다.
          2. a \le b \iff b = a + c 인 기수 c가 존재한다
      11. 만일 X가 무한집합이면, 단사함수 f : \mathbb{N} -> X 가 존재한다. 따라서 임의의 무한집합 X에 대하여 card(\mathbb{N}) \le card(X) 이다.
          1. card(\mathbb{N}) 를 \aleph\_{0} 이라 쓴다.
          2. \aleph\_{0} = card( \mathbb{N} ) = card( \mathbb{Z} ) = card( \mathbb{Q} )
          3. card(\mathbb{R}) \gneq, 무한기수 card(\mathbb{R}) 은 \mathbf{c} 라 쓴다.
      12. card(X ) \le \aleph\_{0} 일 때 X를 셀 수 있는 집합이라 부르고, 그렇지 않으면 셀 수 없는 집합이라고 부른다.
      13. (정리 3.5.3) 임의의 무한기수 a 에 대하여 aa = a이다.
          1. 무한기수 a,b 에 대하여 a \le b \implies a + b = ab = b, a^{b} = 2^{b}
          2. 임의의 기수 a에 대하여 a \lneq 2^{a} 이다.
             1. 임의의 기수 a 보다 더 큰 기수가 존재한다.
   6. 서수와 기수의 정의
      1. 정렬집합 \alpha 가 성질 \xi \in \alpha \implies S\_{\xi} = {\xi} 를 만족할 때 이를 서수라 부른다.
         1. 자연수 전체의 정렬집합 \omega 는 서수이다. 각 자연수도 서수이다.
         2. \beta \in \alpha 이면 \beta = S\_{\beta} \subset \alpha
         3. 정렬집합 A에 대하여 A^{+} = A \cup {A} 에 순서가 정의된다. 임의의 a \in A 에 대하여 a \le A이다.
      2. (도움정리 3.6.1) 서수 \alpha, \beta 가 \alpha \approxeq \beta 를 만족하면 \alpha = \beta 이다.
      3. (도움정리 3.6.2) 서수 \alpha, \beta 에 대하여 다음이 성립한다.
         1. \alpha < \beta \iff \alpha \in \beta \iff \alpha \subsetneq \beta
      4. 임의의 정렬집합 A에 대하여 A \approxeq \alpha 인 서수 \alpha가 유일하게 존재한다.
      5. (정리 3.6.4) 비어있지 않은 임의의 서수들의 집합 E는 최소원소를 가진다.
      6. 임의의 집합 X가 주어지면 X와 동등한 서수 전체의 집합 {\xi : \xi \approx X, \xi \preccurlyeq 2^{X} }을 생각하고, 이 집합의 최소원소를 card(X), 즉 X의 기수라 정의한다.
         1. 서수 \alpha 가 적절한 집합 X에 대하여 \alpha = card(X) 이면 다음 \beta \le \alpha , \beta \approx \alpha \implies \beta = \alpha 이 성립한다.
      7. 기수는 성질 \alpha보다 작은 서수는 \alpha와 동등하지 않다 를 만족하는데, 이러한 서수를 시작서수라 부른다.
         1. 임의의 기수는 시작서수이다. 임의의 시작서수는 기수이다.
      8. (정리 3.6.5) 임의의 서수들의 집합 C는 최소상계 sup C를 가진다.
      9. 자연수 0,1,2,3,… 는 서수이다. 이들을 유한 서수라 부르고, 그렇지 않은 서수들을 초유한 서수라 부른다. 초유한 서수중 최소의 서수는 \omega 이다.
         1. \omega 는 \omega = \alpha^{+} 인 서수 \alpha 를 가지지 않는데, 이러한 서수를 극한 서수라 부른다.
      10. 임의의 서수 \alpha, \beta 에 대하여 \beta 가 극한 서수이면 \alpha^{\beta} = sup{\alpha^{\gamma} : \gamma < \beta} 라 정의한다.
      11. \aleph\_{1} = min{\xi : \aleph\_{0} < card(\xi) \le 2^{\aleph\_{0}} 이라 정의하면 \aleph\_{1} 은 기수가 되고, 다음 성질이 성립하다. 이 성질은 수학의 여러 분야에서 반례를 만드는 데에 폭넓게 쓰인다. 연속체 가설은 \aleph\_{1} = 2^{\aleph\_{0}} 인지 묻는 것이다.
          1. \aleph\_{1} > \aleph\_{0}
          2. \xi \in \aleph\_{1} \implies card(S\_{\xi}) = \aleph\_{0}
      12. 임의의 자연수 n = 1,2, … 에 대하여 \aleph\_{n} = min{\xi : \aleph\_{n-1} < card(\xi) \le 2^{\aleph\_{n-1}} 이라 정의할 수 있다.
          1. \aleph\_{\omega} = sup{ \aleph\_{n} : n < \omega } 라 정의하면 새로운 기수를 얻어 나갈 수 있다.
          2. 임의의 기수 \alpha 에 대하여 \aleph\_{\alpha^{+}} = 2^{\aleph\_{\alpha}} 인지 묻는 것이 일반 연속체 가설이다.
4. 공리계
   1. 집합론의 공리
      1. 모임 S = {x : x \notin x}을 생각하자. 만일 S \in S 이면 정의에 의하여 S \notin S 이다. 만일 S \notin S 이면 정의에 의하여 S \in S 이다. 따라서 모순이다. 이를 러셀의 역설이라 한다.
      2. 열 단어 이내로 나타낼 수 있는 자연수들의 모임 \mathcal{N} 을 생각해보자. 우리말 단어가 유한개이고 이러한 단어들을 열 개 이내로 늘어놓는 방법 역시 유한개이므로 \mathcal{N} 에는 유한개의 자연수밖에 없다. 따라서 “열 단어로 나타낼 수 없는 최소의 자연수” 는 \mathcal{N} 의 원소가 아니다. 그러나 이 자연수는 아홉 단어로 나타내었으므로 \mathcal{N} 의 원소가 된다. 이를 베리의 역설이라 부른다.
      3. 존재공리 : 공집합이 존재한다.
      4. 확장공리 : 집합 A, B 가 같을 필요충분조건은 x \in A \iff x \in B 이다.
      5. 어떤 성질을 기술할 때에는 원소나 집합을 나타내는 변수 및 이들의 관계를 나타내는 \in 과 다음 일곱 단어만을 사용한다.
         1. \or, \and, \neg ,\to ,\iff ,\exists ,\forall
      6. 함축공리 : 임의의 집합 X 와 성질 P(x) 에 대하여 P(x) 가 성립하는 모든 x \in X 들의 집합이 존재한다.
      7. 짝공리 : 임의의 집합 X, Y 에 대하여 X \cup Y 는 집합이다.
      8. 합집합공리 : 임의의 집합 X 에 대하여 \bigcup {x : x \in X} 는 집합이다.
         1. 합집합공리는 짝공리를 유도한다.
      9. 멱집합공리 : 임의의 집합 X 에 대하여 \mathcal{P} (X) 는 집합이다.
      10. 성질 \empty \in \mathcal{A}, A \in \mathcal{A} \implies A^{+} \in \mathcal{A}를 가지는 집합 \mathcal{A} 를 귀납집합이라 부른다.
      11. 무한공리 : 귀납집합이 존재한다.
          1. 모든 귀납집합의 교집합은 \mathcal{N} 이므로 무한공리는 집합 \mathcal{N} 이 존재함을 설명한다.
          2. 함축공리와 무한공리는 존재공리를 유도한다.
      12. 치환공리 : 임의의 x 에 대하여 성질 P(x,y) 가 성립하는 y 가 유일하게 존재한다고 가정하자. 그러면, 임의의 집합 X 에 대하여 다음 성질을 만족하는 집합 Y 가 존재한다.
          1. 임의의 x \in X 에 대하여 P(x,y) 가 성립하는 y \in Y가 존재한다
      13. 존재공리, 확장공리, 함축공리, 짝공리, 합집합공리, 멱집합공리, 무한공리, 치환공리 총 여덟개로 이루어진 공리계는 ZF 공리계라 부른다.
          1. 선택공리를 합하면 ZFC 공리계라 부른다.
             1. 수학의 범주이론을 제외한 모든 분야는 ZFC 공리계에 기반한다.
   2. 무모순성과 독립성
      1. 주어진 공리들로부터 모순된 명제가 유도되지 않아야 한다는 성질을 무모순성이라 한다.
      2. 한 공리가 다른 공리들로부터 유도될 수 없어야 한다는 성질을 독립성이라 한다.
      3. 어떤 공리계 안에서 명제 P를 증명하는 것도 불가능하고 그 부정 ~P 를 증명하는 것도 불가능하다면 P 는 그 공리계 안에서 결정불가능한 명제라 말한다.
         1. 어떤 공리계가 결정불가능한 명제를 가지지 않을 때, 그 공리계가 완전성을 가진다고 말한다.
      4. (괴델의 불완전성정리)(정리 4.2.1) 페아노 공리계가 무모순이면 그 공리계 안에서 결정불가능한 명제가 존재한다.
         1. 산술체계의 무모순성과 완전성이 양립할 수 없다.
      5. (정리 4.2.2) 만일 ZF 공리계가 무모순이면 ZFC 공리계도 무모순이다.
      6. (정리 4.2.3) 만일 ZF 공리계가 무모순이면 ZFC + (\mathbf{c} = \aleph\_{1}) 공리계도 무모순이다.
      7. (정리 4.2.4) 만일 ZF 공리계가 무모순이면, 임의의 자연수 n 에 대하여 ZFC + (\mathbf{c} = \aleph\_{n}) 공리계도 무모순이다.
         1. \mathbf{c} = \aleph\_{1} 이 ZFC 공리계 안에서 결정불가능한 명제이다.
      8. 비유클리드 기하학의 존재성으로부터 평행선 공리가 다른 공리들로부터 증명하는 것이 불가능하다는 사실을 알 수 있다.